2025年度 阪大理物 院試

榊 朋央

2024年8月29日

目次

1　大問1 Lagrange point L_2

(1)

$$L = \frac{1}{2} m \boldsymbol{V}^2 \tag{1.0.1}$$

(2)[*1*2] 回転軸であるため $\dot{z} = 0$ であり、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.0.2}$$

と (1) より、Lagrangian は、

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x} - \omega y)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y} + \omega x)^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \tag{1.0.3}$$

(3)

(2) より、x, y に付いての運動方程式は、Euler-Lagrange 方程式より、

(4)

質量中心（重心）は原点より、

$$0 = M_{\mathrm{A}} x_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}} x_{\mathrm{B}}. \tag{1.0.4}$$

相対距離は、符号に気をつけて、

$$a = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}. \tag{1.0.5}$$

これらを連立することにより、

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}} = -\beta a & (1.0.6\mathrm{a}) \\ x_{\mathrm{B}} = (1 - \beta) a & (1.0.6\mathrm{b}) \\ d\beta \coloneqq \dfrac{M_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}} & (1.0.6\mathrm{c}) \end{cases}$$

(5)

力の釣り合いより、

$$\begin{aligned} m x_{\mathrm{B}} \omega^2 &= G \frac{M_{\mathrm{A}} M_{\mathrm{B}}}{r^2} \\ \Leftrightarrow \omega^2 &= \frac{G (M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}})}{a^3} \end{aligned} \tag{1.0.7}$$

[*1] (2024/08/28) mqty 初心者ミス（カッコが表示されていなかった）。修正済み。

[*2] (2024/08/28) $\dot{z} = 0$ という指摘を研究室の同期複数名から指摘あり。修正済み。

(6)

Lagrange point L_2 は、x 軸上より、

$$m x_{\mathrm{L}} \omega^2 = G\frac{mM_{\mathrm{B}}}{(x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{B}})^2} + G\frac{mM_{\mathrm{A}}}{(x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{A}})^2} \tag{1.0.8}$$

(7)

(6) の両辺を a で割って、(5) を代入する。

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \frac{G}{a\omega^2}\left(\frac{M_{\mathrm{A}}}{(\tilde{x} - x_{\mathrm{A}}/a)^2 a^2} + \frac{M_{\mathrm{B}}}{(\tilde{x} - x_{\mathrm{B}}/a)^2 a^2}\right) \\
&\overset{(4)}{=} \frac{G}{a^3\omega^2}\left(\frac{M_{\mathrm{A}}}{(\tilde{x}+\beta)^2} + \frac{M_{\mathrm{B}}}{(\tilde{x} - (1-\beta))^2}\right) \\
&\overset{(5)}{=} \frac{1}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}}\left(\frac{M_{\mathrm{A}}}{(\tilde{x}+\beta)^2} + \frac{M_{\mathrm{B}}}{(\tilde{x} - (1-\beta))^2}\right) \\
&\overset{(1.0.6c)}{=} \frac{1-\beta}{(\tilde{x}+\beta)^2} + \frac{\beta}{(\tilde{x} - (1-\beta))^2}
\end{aligned} \tag{1.0.9}$$

(8)

$$x_{\mathrm{L}} = x_{\mathrm{B}} + \delta \cdot a \Leftrightarrow \tilde{x} = (1-\beta) + \delta \tag{1.0.10}$$

を (7) に代入すると[*3]、

$$\begin{aligned}
(1-\beta) + \delta &= \frac{1-\beta}{(\delta+1)^2} + \frac{\beta}{(\delta^2)^2} \\
&\simeq (1-\beta)(1-2\delta) + \frac{\beta}{\delta^2} \\
\Leftrightarrow \delta^2 - \beta\delta^2 + \delta^3 &= \delta^2(1-2\delta) - \beta\delta^2(1-2\delta) + \beta \\
\Leftrightarrow \beta\left(1+2\delta^3\right) &= 3\delta^3 \\
\therefore \beta &\simeq 3\delta^3
\end{aligned} \tag{1.0.11}$$

(9)

(8) より、求める距離 d は、

$$\begin{aligned}
d &= x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{B}} \\
&= \delta a
\end{aligned} \tag{1.0.12}$$

*3 (2024/08/28) 同期と $\beta =$ にしてから近似を行う方法でも同じ結果になることを確認。

ここで、δ は、

$$
\begin{aligned}
\delta &\simeq \sqrt[3]{\frac{\beta}{3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{M_{\mathrm{B}}}{3(M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}})}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{5.97\times10^{24}}{5.97\times10^{24}+1.99\times10^{30}}} \\
&\simeq \sqrt[3]{\frac{1}{3}\frac{6.0\times10^{24}}{2.0\times10^{30}}} \\
&= 0.01.
\end{aligned}
\tag{1.0.13}
$$

よって、[*4]

$$
d = 0.01\times1.5\times10^{1}1 = 1.5\times10^{9} \qquad [\mathrm{m}]. \tag{1.0.14}
$$

[*4] Wikipedia の記事 Lagrange point（ラグランジュ点の英語版）に書いてあるものと同じ値である（孫引き）。δ の近似値も同記事に載っている。なんなら、導出もある。

2　大問 2 導体中の電磁波

Maxwell 方程式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.0.1a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.0.1b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.0.1c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.0.1d}$$

(1)

式 (2.0.1a), (2.0.1b) より示せる。

(2)

頑張って計算

(3)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.0.2a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.0.2b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.0.2c}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.0.2d}$$

Ohm's law と $\nabla\times$ (2.0.2b), (2.0.2d) より、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \epsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \sigma \mu \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.0.3}$$

ここで、ベクトル解析の公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}$ は任意のベクトル) と (2.0.2a) を使った。

(5)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \tag{2.0.4}$$

を (2.0.3) に代入すると、

$$\begin{aligned} (ik)^2 \boldsymbol{E} &= \epsilon \mu (-i\omega)^2 \boldsymbol{E} + \sigma \mu (-i\omega) \boldsymbol{E} \\ \Leftrightarrow k^2 &= \epsilon \mu \omega^2 + i \sigma \mu \omega \end{aligned} \tag{2.0.5}$$

(6)

$\epsilon\mu/\sigma \ll 1$ のとき (5) の結果の右辺第 1 項が消えるので、

$$k^2 = i\sigma\mu\omega. \tag{2.0.6}$$

$k = k_1 + ik_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ とおいて、実部と虚部を比較すると、

$$\begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = 0 & \text{(2.0.7a)} \\ 2k_1k_2 = \sigma\mu\omega & \text{(2.0.7b)} \end{cases}$$

z 軸正の向きに進むので、$k_1 > 0$ 。(2.0.7a) より、$k_2 = \pm k_1$。ここで、(2.0.7b) の右辺は正なので、$k_2 = k_1$。結局、次が得られる：

$$k_1 = k_2 = \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}. \tag{2.0.8}$$

(7)

(2.0.4) に (6) の結果を代入すると、

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}z} e^{i\left(\sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}z - \omega t\right)}. \tag{2.0.9}$$

よって、振幅は*5、

$$|\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{E}_0| e^{-\sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}z}. \tag{2.0.10}$$

(8)*6

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\omega}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{2\pi\sigma\mu f}} \qquad (\because \omega = 2\pi f,\ f: \text{振動数}) \\ &= \sqrt{\frac{3.6 \times 10^{-8}}{3.14 \times 955 \times 10^3 \times 1.2 \times 10^{-4}}} \\ &\simeq \sqrt{\frac{10^{-7}}{1.04 \times 955}} \\ &\simeq \sqrt{\frac{10^{-7}}{1000}} = 1.0 \times 10^{-5}\ [\mathrm{m}] \end{aligned} \tag{2.0.11}$$

(9)

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} = \frac{1}{\Lambda}\boldsymbol{E} \tag{2.0.12}$$

*5 振幅は絶対値で表されることに注意。

*6 (2024/08/28) 研究室の同期から $\omega = 2\pi f$ の指摘あり。訂正済み

と (2.0.2b)/Λ より、

$$\partial_t\left(\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{\Lambda}\boldsymbol{B}\right)=0 \tag{2.0.13}$$

(10)[*7]

(2.0.2d) の両辺 ∇× をとると、

$$\begin{aligned}-\nabla^2\boldsymbol{B}&=-\epsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}+\mu\nabla\times\boldsymbol{j}\\&=-\epsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}-\frac{\mu}{\Lambda}\boldsymbol{B}\\\therefore\left[\nabla^2-\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\boldsymbol{B}&=\frac{\mu}{\Lambda}\boldsymbol{B}\end{aligned} \tag{2.0.14}$$

ここで、B_x は、x, y に依存しないので[*8]、

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}-\epsilon\mu\frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}=\frac{\mu}{\Lambda}B_x \tag{2.0.15}$$

となる。さらに、定常磁場より時間依存性はないので、

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}=\frac{\mu}{\Lambda}B_x \tag{2.0.16}$$

この解は、$z\to\infty$ で非発散と境界条件から[*9]

$$B_x=B_0e^{-\sqrt{\frac{\mu}{\Lambda}}z} \tag{2.0.17}$$

*7 (2024/08/28) (8) を指摘してくれた同期が $+\frac{\mu}{\Lambda}\boldsymbol{B}$ の符号が違うことを指摘してくれた。訂正済み。

*8 なぜかはわからない

*9 超伝導体なので、マイスナー効果が生じるはずである。実際、指数関数的に減衰するため磁場が内部に（ほぼ）侵入しない事がわかる（厳密には定数部分を計算する必要がある）。

3 大問3 調和振動子

(1)[*10]

x の関数 $f(x)$ に対して、

$$[x,p]f(x) = xpf(x) - pxf(x) = -xi\hbar f'(x) + i\hbar xf'(x) + i\hbar f(x) = i\hbar f(x). \tag{3.0.1}$$

よって、

$$[x,p] = i\hbar. \tag{3.0.2}$$

(2), (3)[*11]

$a\left|0\right\rangle = 0$ に左から $\left\langle x\right|$ を作用させると、

$$\begin{aligned}\left\langle x\right| a \left|0\right\rangle &= 0 \\ \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\left(x + \frac{i}{m\omega}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\left|x\right\rangle\right]\left|0\right\rangle &= 0 \\ \frac{d}{dx}\left\langle x|0\right\rangle &= -\frac{m\omega}{\hbar}x\left\langle x|0\right\rangle \\ \therefore \varphi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\end{aligned} \tag{3.0.3}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\varphi_0(x) &= -\frac{m\omega}{\hbar}x\varphi_0(x) \qquad (\because (2) \text{ の微分方程式}) \\ \frac{d^2}{dx^2}\varphi_0(x) &= \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2\varphi_0(x) - \frac{m\omega}{\hbar}\varphi_0(x)\end{aligned} \tag{3.0.4}$$

よって、$\mathcal{H}\varphi_0(x) = \varepsilon_0\varphi_0(x)$ の左辺は

$$\begin{aligned}(LHS) &= -\frac{\hbar}{2m}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2 - \frac{m\omega}{\hbar}\right]\varphi_0(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\varphi_0(x) \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega\varphi_0(x)\end{aligned} \tag{3.0.5}$$

なので、$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$。

(5)

$$\begin{aligned}\left\langle x^2\right\rangle_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}dx \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\end{aligned} \tag{3.0.6}$$

[*10] (2024/08/28) github copilot の予測を信じて確認していなかった。すごい答えだったので、ネタとして書き残しておく。修正済み。$[x,p]f(x) = (xp - px)f(x) = xpf(x) - pxf(x) = -xi\hbar f'(x) + i\hbar xf'(x) = i\hbar f(x)$

[*11] (2024/08/29) 神戸大の友人から微分が抜けていることの指摘あり。修正済み。

あるいは、生成消滅演算子 $a, a^\dagger$ を使って[*12]、

$$\begin{aligned}\left\langle x^2\right\rangle_0 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|\,(a+a^\dagger)^2\,|0\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left|(a+a^\dagger)\,|0\rangle\right|^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left||1\rangle\right|^2 \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\end{aligned} \tag{3.0.7}$$

(6)

$$\mathcal{P}\varphi_0(x) = \varphi_0(-x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(-x)^2} = \varphi_0(x) \tag{3.0.8}$$

固有値 P_0 は、

$$P_0 = 1 \tag{3.0.9}$$

(7)

$$\mathcal{P}\varphi_j(x) = P_j\varphi_j(x) \tag{3.0.10}$$

が成立するとする。$j+1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\varphi_{j+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{j+1}}\mathcal{P}(a^\dagger\varphi_j(x)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{j+1}}(-a^\dagger)\varphi_j(-x) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{j+1}}a^\dagger\mathcal{P}\varphi_j(x) \\ &= -P_j\frac{1}{\sqrt{j+1}}a^\dagger\varphi_j(x) \\ &= -P_j\varphi_{j+1}(x)\end{aligned} \tag{3.0.11}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a^\dagger\varphi_j(x)) &= \mathcal{P}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{1}{m\omega}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\varphi_j(x)\right) \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(-x - i\frac{1}{m\omega}\frac{\hbar}{i}\frac{d}{d(-x)}\varphi_j(-x)\right) \\ &= -a^\dagger\varphi_j(-x)\end{aligned} \tag{3.0.12}$$

を使った。よって、固有値は仮定 (3.0.10)

$$\mathcal{P}\varphi_{j+1}(x) = P_{j+1}\varphi_{j+1}(x) \tag{3.0.13}$$

[*12] めんどくさい規格化定数を考えなくていいため、この解法をすすめる。

より、$P_{j+1}=-P_j$ となり、$\varphi_{j+1}(x)$ は固有関数である。$j=0$ のときは、(6) で示しているので、任意の $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して固有関数であることが示された。また、固有値は、

$$P_n=-P_{n-1}=\cdots=(-1)^n \tag{3.0.14}$$

(8)

ブースト演算子 $\mathcal{B}(a)$ を次のように定義する[*13]:

$$\mathcal{B}(a)\left|p\right\rangle=\left|p+a\right\rangle. \tag{3.0.15}$$

ここで、$|p\rangle$ は無限階微分可能とする。右辺を Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned}\left|p+a\right\rangle&=\left|p\right\rangle+a\frac{d}{dp}\left|p\right\rangle+\frac{a^2}{2}\frac{d^2}{dp^2}f(p)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left(\frac{d}{dp}\right)^n\left|p\right\rangle\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left(\frac{1}{-i\hbar}\right)^n\left(-i\hbar\frac{d}{dp}\right)^n\left|p\right\rangle\\&=\exp\left(\frac{iax}{\hbar}\right)\left|p\right\rangle.\end{aligned} \tag{3.0.16}$$

状態 $|n\rangle$ に対して、$a=\hbar k$ として、この演算子を作用させる[*14]:

$$\mathcal{B}(\hbar k)\left|n\right\rangle=\mathcal{B}(\hbar k)\sum_p\left|p\right\rangle\left\langle p|n\right\rangle=\sum_p\left|p+\hbar k\right\rangle\left\langle p|n\right\rangle=\sum_p\left\langle p|n\right\rangle\left|p+\hbar k\right\rangle. \tag{3.0.17}$$

このように、$|p+\hbar k\rangle$ の線形結合としてかけるのでこれは撃力後の状態と見れる。よって、

$$\left|\psi\right\rangle=\mathcal{B}(\hbar k)\left|n\right\rangle=\exp(ikx)\left|n\right\rangle \tag{3.0.18}$$

(9)[*15]

$$\begin{aligned}P(n\to n)&=\left|\left\langle n\right|e^{ikx}\left|n\right\rangle\right|^2=\left|\left\langle n\right|\left(1+(ikx)+\frac{1}{2}(ikx)^2+\mathcal{O}(k^3)\right)\left|n\right\rangle\right|^2\\&\simeq\left|1-\frac{k^2}{2}\left\langle x^2\right\rangle_n\right|^2\simeq\left|1-k^2\left\langle x^2\right\rangle_n\right|\end{aligned} \tag{3.0.19}$$

(10)

$$P(0\to 0)=\left|\left\langle 0\right|e^{ikx}\left|0\right\rangle\right|^2 \tag{3.0.20}$$

[*13] J.J. サクライ 現代の量子力学 第 3 版 の問題演習にこの名前で載っている。

[*14] $\left|\psi\right\rangle=\mathcal{B}(a)\left|n\right\rangle$ とする正当性をまずは示さなければならない。なぜなら、ブースト演算子の定義は運動量の平行移動であり、それが撃力とは限らないからである。

[*15] (2024/08/28) 神戸大の友人から展開する必要があると指摘があった。訂正済み。

ここで、$\langle 0| e^{ikx} |0\rangle$ を考えると、[*16]

$$
\begin{aligned}
\langle 0| e^{ikx} |0\rangle &= \langle 0| \int dx' \, |x'\rangle \langle x'| e^{ikx} |0\rangle \\
&= \int dx' e^{ikx'} \langle 0|x'\rangle \langle x'|0\rangle \qquad (\because \langle x'| e^{ikx} = e^{ikx'} \langle x'|) \\
&= \int dx' e^{ikx'} \varphi_0(x')\varphi_0(x') \\
&= \int dx' e^{ikx'} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x'^2} \\
&= \int dx' \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}x'^2 + ikx'\right) \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int dx' \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x' - i\frac{\hbar k}{m\omega}\right)^2 - \frac{\hbar k^2}{4m\omega}\right) \\
&= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\hbar k^2}{4m\omega}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{\hbar k^2}{4m\omega}\right) = \exp\left(-\frac{k^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{k^2}{2}\left\langle x^2 \right\rangle_0\right).
\end{aligned}
\tag{3.0.21}
$$

よって、

$$
P(0 \to 0) = \exp\left(-k^2 \left\langle x^2 \right\rangle_0\right) \tag{3.0.22}
$$

ここで、$a \in \mathbb{R}$ に対して、$e^{-a} > 0$ なので、絶対値を外せることを使った。

[*16] この証明は、J.J. サクライ 現代の量子力学 第 3 版 の演習問題 2.20 にある。解答は J.J. サクライの問題解説 第 2 版 第 2 章問題 18。

4　大問 4 統計力学

(1)

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = \frac{p^2}{2m} \tag{4.0.1}$$

$$p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i \quad (n_i \in \mathbb{Z},\ i = x, y) \tag{4.0.2}$$

より、$N_0(\varepsilon_{\mathrm{F}})$ は、

$$N_0(\varepsilon_{\mathrm{F}}) = \pi\left(\sqrt{2m\varepsilon_{\mathrm{F}}}\right)^2 / (2\pi\hbar/L)^2 = \frac{mS}{2\pi\hbar^2}\varepsilon_{\mathrm{F}} \tag{4.0.3}$$

(2)

全スピン磁気モーメント M は、相互作用なしより

$$\begin{aligned} M &= \sum_{\sigma=\pm 1} N_0(\varepsilon_{\mathrm{F}} + \mu_{\mathrm{B}} B\sigma)\mu_{\mathrm{B}}\sigma \\ &= N_0(\varepsilon_{\mathrm{F}} + \mu_{\mathrm{B}} B(+1))\mu_{\mathrm{B}}(+1) + N_0(\varepsilon_{\mathrm{F}} + \mu_{\mathrm{B}} B(-1))\mu_{\mathrm{B}}(-1) \\ &= \frac{mS}{2\pi\hbar^2}\mu_{\mathrm{B}}\{(\varepsilon_{\mathrm{F}} + \mu_{\mathrm{B}} B) - (\varepsilon_{\mathrm{F}} - \mu_{\mathrm{B}} B)\} \\ &= \frac{mS}{\pi\hbar^2}\mu_{\mathrm{B}}^2 B \end{aligned} \tag{4.0.4}$$

(3)

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + (p_y + qBx)^2\right) \tag{4.0.5}$$

より、

$$\begin{aligned} z &= \int_S dxdy\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y \exp(-\beta h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))\right] \\ &= \int_S dxdy\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dp_x dp_y \exp\left(-\beta\frac{1}{2m}\left(p_x^2 + (p_y + qBx)^2\right)\right)\right] \\ &= \int_S dxdy\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\right] = \frac{mS}{2\beta\pi\hbar^2} \end{aligned} \tag{4.0.6}$$

(4)

z が B に依らないので、$M = 0$。

(5)

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_\Lambda=0}^{1} \exp\left(-\beta \sum_{l=0}^{\Lambda} (\epsilon_l - \mu) n_l\right) \\
&= \sum_{n_1=0}^{1} \cdots \sum_{n_\Lambda=0}^{1} \prod_{l=0}^{\Lambda} \exp(-\beta(\epsilon_l - \mu) n_l) \\
&= \sum_{n_1=0}^{1} e^{-\beta(\epsilon_1-\mu)n_1} \cdots \sum_{n_\Lambda=0}^{1} e^{-\beta(\epsilon_\Lambda-\mu)n_\Lambda} \\
&= \prod_{l=0}^{\Lambda} \sum_{n_l=0}^{1} e^{-\beta(\epsilon_l-\mu)n_l} \\
&= \prod_{l=0}^{\Lambda} (1 + e^{-\beta(\epsilon_l-\mu)}) \\
&= \prod_{l=0}^{\Lambda} \xi_l
\end{aligned}
\tag{4.0.7}
$$

(6)

$$
J = -\frac{1}{\beta} \ln \Xi = -\frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\Lambda} \ln \xi_l = -\frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\Lambda} \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_l-\mu)}\right) \tag{4.0.8}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
N = -\frac{\partial J}{\partial \mu} &= \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\Lambda} \frac{\beta e^{-\beta(\epsilon_l-\mu)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_l-\mu)}} \\
&= \sum_{l=0}^{\Lambda} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_l-\mu)} + 1}
\end{aligned}
\tag{4.0.9}
$$

(7)

$$
\Xi = \prod_{l=0}^{\Lambda} \xi_l^D \tag{4.0.10}
$$

より、グランドポテンシャル J は、

$$
\begin{aligned}
J = -\frac{1}{\beta} \ln \Xi &= -\frac{1}{\beta} D \sum_{l=0}^{\infty} \ln \xi_l \\
&= -\frac{1}{\beta} D \sum_{l=0}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-\beta(\epsilon_l-\mu)}\right) \\
&= -\frac{1}{\beta} D \sum_{l=0}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-\beta\epsilon_l} e^{\beta\mu}\right) \\
&= -\frac{1}{\beta} D \sum_{l=0}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-2\beta\mu_{\mathrm{B}} B(l+1/2)} e^{\beta\mu}\right)
\end{aligned}
\tag{4.0.11}
$$

よって、

$$\varphi(x) = -\frac{D}{\beta} \ln \left(1 + e^{-2\beta\mu_{\mathrm{B}}Bx} e^{\beta\mu}\right) \tag{4.0.12}$$

(8)

$$\begin{aligned}
J_0 = \int_0^\infty \varphi(x) dx &= -\int_0^\infty \frac{D}{\beta} \ln \left(1 + e^{-2\beta\mu_{\mathrm{B}}Bx} e^{\beta\mu}\right) dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{qBS}{2\pi\hbar\beta} \ln \left(1 + e^{-2\beta\mu_{\mathrm{B}}Bx} e^{\beta\mu}\right) dx \\
&= -\int_0^\infty \frac{qS}{2\pi\hbar\beta^2\mu_{\mathrm{B}}} \ln \left(1 + e^{-2\beta\mu_{\mathrm{B}}Bx} e^{\beta\mu}\right) d(\beta\mu_{\mathrm{B}}Bx) \\
&= -\int_0^\infty \frac{qS}{2\pi\hbar\beta^2\mu_{\mathrm{B}}} \ln \left(1 + e^{-2y} e^{\beta\mu}\right) dy \qquad (y = \beta\mu_{\mathrm{B}}Bx)
\end{aligned} \tag{4.0.13}$$

ここで、$B, \mu_{\mathrm{B}} > 0$ なので、y の積分範囲は変更を受けないことを用いた。この表式から、J_0 は B に依存しない。

(9)